L'UNIVERS ENSEMBLISTE (*)

par G. Papy
Professeur à l'Université de Bruxelles

Il y a deux mille ans Euclide parvenait à exposer la mathématique de base de son temps en se plaçant dans un cadre unique, permanent et qui allait sembler longtemps immuable : *l'espace physique ambiant.* Mais la création des géométries non euclidiennes et le développement de l'algèbre ont fait éclater le cadre euclidien-archimédien.

La mathématique a retrouvé son unité perdue grâce à la création de la théorie des ensembles issue du génie de Georg Cantor dans le dernier quart du XIX^e^ siècle (1872-1897); en effet toute la mathématique de base de l'époque actuelle se développe dans le cadre de l'*Univers ensembliste* qui joue ainsi le rôle rempli jadis par l'espace d'Euclide.

L'enseignement de la mathématique dans le secondaire semble donc devoir être placé dans le cadre adéquat de l'Univers ensembliste. Nous croyons que l'exposé qui va suivre montrera que l'accès à cet Univers est au moins aussi aisé que l'accès à l'espace mathématique d'Euclide.

*
* *

Dégageons d'abord les notions d'*objet* (ou *individu*, ou *élément*) et de *classe d'objets*. Une classe est déterminée lorsque pour tout objet il existe une réponse : *oui* ou *non* à la question « Cet objet appartient-il à la classe ? »

Etant donné une classe on peut considérer la classe des objets qui n'y appartiennent pas : cette classe est dite *complémentaire* de la précédente. Un exemple de deux classes complémentaires est fourni par l'*Univers* $\mathcal{U}$, la classe de tous les objets, et la *classe vide* Φ qui ne comprend aucun objet.

C'est un usage courant en mathématique de désigner les *êtres*

(*) Rédigé par M. R. Holvoet, d'après un texte du professeur G. Papy.

(c'est-à-dire les classes et les objets) par des symboles ou des assemblages de symboles. On relate le fait que *deux assemblages désignent le même être* en écrivant le signe $=$ entre les deux symboles, par exemple :

$$25 - 22 = 1\,000\,000 - 999\,997 .$$

Si *a désigne un objet* et si *A désigne une classe*, nous signalerons que (l'objet désigné par) a appartient à (la classe désignée par) A en écrivant : $a \in A$. Dans l'éventualité contraire, nous aurions écrit : $a \notin A$.

En employant les symboles abréviateurs $\Rightarrow$ pour « implique », $\Leftrightarrow$ pour « si et seulement si », $\forall x$ pour « pour tout x », $\exists x$ pour « il existe un x », l'article premier du règlement d'ordre intérieur de l'Univers ensembliste s'écrit comme suit :

Axiomes d'extension

Si x, y désignent des objets et C, D des classes :

E 1. On a une et une seule des éventualités : $x \in C$, $x \notin C$.

E 2. $x = y \Rightarrow (\forall C : x \in C \Leftrightarrow y \in C)$.

E 3. $C = D \Rightarrow (\forall x : x \in C \Leftrightarrow x \in D)$.

E 4. $\forall x : x \in \mathfrak{U}$.

E 5. $\forall x : x \notin \Phi$.

Les classes sont souvent définies par une propriété des objets qui y appartiennent. Ainsi si P est une *proposition* ou *prédicat* portant sur un objet variable x, nous écrirons Px si la proposition correspondant à x est vraie, $\sim Px$ dans le cas contraire ; on désigne alors par $\{x \mid Px\}$ la classe des objets x tels que l'on ait Px. On a en particulier : pour toute classe C, $C = \{x \mid x \in C\}$,

$$\mathfrak{U} = \{ x \mid x = x \},$$

$$\Phi = \{ x \mid x \neq x \},$$

la classe complémentaire $\sim C$ de C : $\sim C = \{x \mid x \notin C\}$.

Si a et b désignent des objets, on pose

$$\{a, b\} = \{ x \mid x = a \text{ ou } x = b\} .$$

Si $a \neq b$, on dit que $\{a, b\}$ est une *paire*. Si $a = b$, on pose $\{a\} = \{a, a\}$ et la classe $\{a\}$ est appelée un *singleton*.

Si A et B désignent des classes, on définit l'*intersection* $A \cap B$, la *réunion* $A \cup B$ et la *différence* $A \setminus B$ de ces deux classes en posant

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \},$$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \},$$

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}.$$

L'*inclusion* de deux classes A, B est définie de la façon suivante :

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

(On dit alors par exemple : A est *incluse* à B, A est *contenue* dans B, A est une *partie* de B.)

Lorsque $A \subset B$ avec $A \neq B$, on dit que A est une *partie propre* de B ou que A est *strictement incluse* à B.

On voit que l'inclusion jouit des propriétés suivantes :

$$A = B \Rightarrow A \subset B \qquad \text{(réflexivité)}$$

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C \qquad \text{(transitivité)}$$

$$A \subset B \text{ et } B \subset A \Rightarrow A = B \qquad \text{(antisymétrie)}$$

*
* *

En mathématique comme dans la vie courante, on désire parfois regarder des classes comme des objets. Ainsi une droite est une classe de points et l'on parle de la classe des droites du plan. John von Neumann a montré que le grand problème consiste à délimiter jusqu'à quel point il reste licite de regarder une classe comme un objet. Cantor croyait que toute classe pouvait être regardée comme un objet ; on sait que ce point de vue « naïf » conduit à des contradictions qui ont été révélées par Cantor, Burali-Forti et Bertrand Russell. Le « paradoxe » de Russell (1903) est très simple à expliquer : Désignons par E la classe des classes qui ne se comprennent pas comme élément (c'est-à-dire : $X \in E \Leftrightarrow X \notin X$) ; suivant E 1, on a une et une seule des éventualités : $E \in E$, $E \notin E$; si $E \in E$, alors par la définition de E : $E \notin E$; si $E \notin E$, alors la définition de E nous donne : $E \in E$; on en déduit que E appartient à E si et seulement si E n'appartient pas à E, ce qui est absurde.

Il est naturel de considérer une classe comme un objet lorsque la classe a une certaine *cohésion* et n'est *pas trop grande*. Nous posons la définition suivante : *on appelle* ENSEMBLE *toute classe qui est un objet.*

Il est encore naturel d'accepter qu'*il existe un ensemble* (*axiome d'existence*) et que *toute partie d'un ensemble est un ensemble* (*axiome de spécification*).

De ces deux axiomes il suit immédiatement que Φ *est un ensemble* (et en particulier Φ *est un objet*). Par contre l'*Univers* $\mathcal{U}$ *n'est pas un ensemble* (théorème de Bertrand Russell).

Ainsi le *premier objet* particulier dont l'existence ait été assurée est un ensemble : Φ. Nous énonçons maintenant une série d'axiomes qui assurent l'existence de *nouveaux ensembles* à partir d'ensembles existants :

Quels que soient les ensembles a *et* b, *la classe* $\{a, b\}$ *est un ensemble.*

La réunion $\bigcup A = \{ x \mid \exists a : x \in a \in A \}$ *de tout ensemble (d'ensembles)* A *est un ensemble.*

La classe des parties $\mathfrak{P}E$ *de tout ensemble* E *est un ensemble.*

L'Univers ensembliste est donc en quelque sorte engendré par l'ensemble vide. Nous postulons d'ailleurs que dans notre Univers : *tout objet est un ensemble.*

*
* *

En se basant sur les notions ensemblistes qui précèdent, on peut développer *la théorie des nombres naturels*. Puisque nous voulons considérer des classes de nombres naturels, ceux-ci doivent être des objets, c'est-à-dire des ensembles. Cela étant, il est naturel de définir zéro comme un ensemble ne comprenant aucun objet, ce qui entraîne : $0 = \Phi$. Ensuite on définit :

$$1 = 0 \cup \{ 0 \} = \{ 0 \}$$
$$2 = 1 \cup \{ 1 \} = \{ 0 \} \cup \{ 1 \} = \{ 0, 1 \}$$
$$3 = 2 \cup \{ 2 \} = \{ 0,1 \} \cup \{ 2 \} = \{ 0, 1, 2 \}.$$

Et *le successeur de* x, noté x^+ est défini comme

$$x^+ = x \cup \{ x \}.$$

Une classe est dite *héréditaire* lorsqu'elle comprend Φ et qu'elle comprend le successeur de chacun de ses éléments. Postulant avec Zermelo qu'*il existe un ensemble héréditaire* et prenant l'intersection de la classe des ensembles héréditaires, on obtient *le plus petit ensemble héréditaire*, noté ω, qu'on appelle l'*ensemble des nombres naturels*.

Grâce au *principe de l'induction complète* on peut établir les propriétés que la théorie attribue aux nombres naturels. En particulier, nous avons la proposition que *quels que soient les nombres naturels* m *et* n, *on a une et une seule des trois éventualités*

$$m \in n \qquad m = n \qquad n \in m\,.$$

Si m et n sont des naturels, on écrit souvent $m \leqq n$ au lieu de $m \subset n$ et $m < n$ au lieu de $m \in n$.

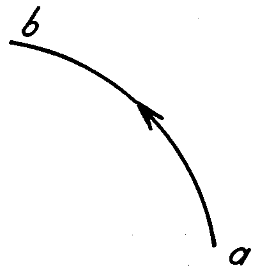
Autre proposition intéressante : *tout ensemble non vide de nombres naturels comprend un minimum.*

*
* *

On sait l'importance de la notion de *couple* en mathématique. La définition suivante, due à Kuratowski, place les couples dans l'Univers des objets :

$$(b, a) = \big\{ \{ a, b \}, \{ a \} \big\}.$$

Il est souvent commode de représenter le couple (b, a) par une flèche d'origine a et d'extrémité b.



On déduit de la définition :

$$(b, a) = (d, c) \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d.$$

Etant donné que tout couple est un ensemble (et donc un objet), on peut considérer des classes de couples : *on appelle* CORRESPONDANCE *toute classe de couples.* Lorsque le couple (y, x) appartient à la correspondance Γ, on écrit $y\Gamma x$. Ainsi par exemple l'égalité est la classe des *couples identiques* :

$$= \; = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{U}\}.$$

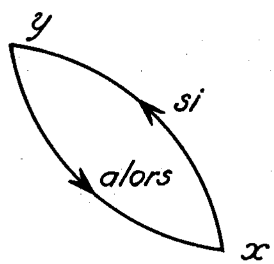
La correspondance Γ est dite *réflexive*, lorsque

$$\forall x : x \Gamma x .$$

pour tout x.

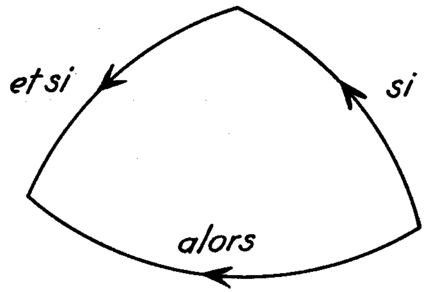
La correspondance Γ est dite *symétrique*, lorsque

$$yRx \Rightarrow xRy .$$



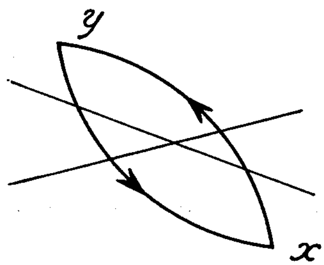
La correspondance Γ est dite *transitive*, lorsque

$$yRx \text{ et } zRy \Rightarrow zRx .$$



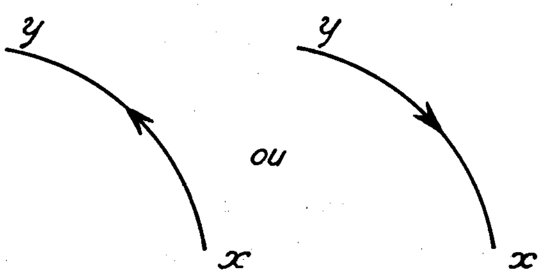
La correspondance Γ est dite *antisymétrique*, lorsque

$$yRx \text{ et } xRy \Rightarrow x = y .$$



La correspondance Γ est dite *totale*, lorsque

$$\forall (y, x) : yRx \text{ ou } xRy .$$



pour tout (y, x) .

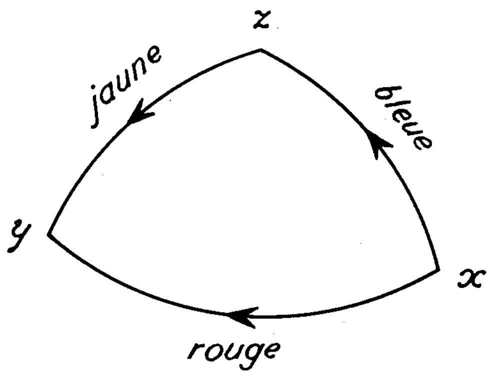
On appelle *réciproque de la correspondance* Γ et l'on note Γ^{-1} la correspondance formée des *couples réciproques* de ceux de Γ ; on a donc

$$\Gamma^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in \Gamma\}.$$

Si R et S sont des correspondances, on appelle *composée de S et de R* et l'on note $R \circ S$ la correspondance définie par

$$y (R \circ S) x \Leftrightarrow \exists z : yRz \text{ et } zSx .$$

Les couples étant représentés par des flèches, toute correspondance est une classe de flèches. Si l'on représente alors en bleu la correspondance S, en jaune la correspondance R et en rouge la correspondance $R \circ S$, il y aura une flèche rouge de x vers y chaque fois qu'une bleue part de x et que de son extrémité part une jaune aboutissant en y.



Si A et B sont des classes quelconques et Γ une correspondance, nous posons

$$\Gamma A = \{ b \mid \exists a \in A : (b, a) \in \Gamma \},$$
$$B\Gamma = \{ a \mid \exists b \in B : (b, a) \in \Gamma \};$$

(donc : ΓA est la classe des extrémités des couples de Γ partant de A et $B\Gamma$ est la classe des origines des couples de Γ qui aboutissent dans B). Ainsi, soit Γ la correspondance « a comme père » ; on trace donc une flèche de x vers y chaque fois que

$$x \text{ a comme père } y ;$$

soit alors

$$A = B = \text{la classe des habitants de Bruxelles} ;$$

on a $\Gamma A =$ la classe des pères des habitants de Bruxelles et $A\Gamma =$ la classe des êtres dont le père habite Bruxelles.

Une correspondance Γ est dite *fonctionnelle* $\longleftarrow$ (resp. $\longrightarrow$) lorsque pour tout x, la classe $\Gamma\{x\}$ (resp. $\{x\}\Gamma$) est un singleton ou l'ensemble vide. L'éventuel élément de $\Gamma\{x\}$ est appelé la *valeur de Γ en x*.

Une correspondance Γ est dite *bifonctionnelle* lorsqu'elle est fonctionnelle $\longleftarrow$ et $\longrightarrow$.

Soit f une correspondance fonctionnelle (sous-entendu comme d'habitude : $\longleftarrow$) ; si $A = \mathfrak{U} f$ et $f \mathfrak{U} \subset B$, on dit que f applique A dans B et l'on note ce fait $f : A \longrightarrow B$ ($\mathfrak{U} f$ est appelé le *domaine* de f et $f \mathfrak{U}$ l'*image* de f).

Un rôle important est joué par la notion d'*équipotence* : il est naturel de dire que deux classes A et B sont *équipotentes* ou *également nombreuses* (ce qui est noté $A \# B$), lorsqu'il existe une correspondance bifonctionnelle appliquant A sur B, c'est-à-dire telle que $fA = B$.

Il est encore naturel de dire que *la classe A est moins nombreuse que la classe B* (noté $A \prec B$), lorsque A est équipotente à une partie de B.

Nous avons les propriétés suivantes :

1. Pour toute classe A : $A \prec A$ (réflexivité).

2. $A \prec B$ et $B \prec C \Rightarrow A \prec C$ (transitivité).

Bien que l'on n'ait pas l'antisymétrie de $\prec$, le théorème de Bernstein-Schröder fournit le résultat suivant :

3. $A \prec B$ et $B \prec A \Rightarrow A \# B$ (Bernstein-Schröder).

En pensant à l'interprétation intuitive de la notion d'ensemble il est naturel d'admettre l'axiome suivant :

Toute classe équipotente à un ensemble est elle-même un ensemble.

On appelle *relation* toute correspondance qui est un ensemble. De manière plus particulière on appelle *fonction* toute relation fonctionnelle, *bifonction* toute relation bifonctionnelle, *équivalence* toute relation d'équivalence (c'est-à-dire toute relation réflexive, symétrique et transitive) et *ordre* toute relation d'ordre (c'est-à-dire toute relation réflexive, transitive et antisymétrique).

On peut établir le théorème suivant :

Une correspondance Γ est une relation si et seulement si $\mathfrak{U}\Gamma$ et $\Gamma\mathfrak{U}$ sont des ensembles.

Armés de ces connaissances nous pouvons distinguer *ensembles finis* et *ensembles infinis*. Par définition, *on appelle finie toute classe équipotente à un nombre naturel.* Cette définition est légitime, car *deux naturels distincts ne sont pas équipotents.*

Toute classe finie est donc un ensemble (fini). Et l'on désigne par $\# E$ le (seul) naturel équipotent à l'ensemble fini E. (On appelle $\# E$ le (nombre) *cardinal* de E.)

On appelle *ensemble infini* tout ensemble non fini. Puisque ω est équipotent à l'une de ses parties propres (Galilée), *ω est un ensemble infini.* Tout ensemble E équipotent à ω est dit *dénombrable* ; on écrit alors $\# E = \omega$. Il est facile de montrer que *tout ensemble infini contient une partie dénombrable* et *un ensemble* *est infini si et seulement s'il est équipotent à l'une de ses parties propres* (Dedekind).

Pour établir ces deux dernières propositions on fait appel à l'*axiome du choix* (Zermelo, Skolem) : *Il existe une correspondance fonctionnelle* $c : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$ *telle que* $c(x) \in x$ *pour tout* $x \in \mathfrak{U}$.

*
* *

On appelle *ordonné* E tout ensemble E muni d'un *ordre* $\leqq$ (donc $\leqq \subset E \times E$). L'ordonné $E, \leqq$ étant donné, l'ordre de $E, \leqq$ érige toute partie P de E en un ordonné que l'on note $P, \leqq$.

On appelle alors maj P l'*ensemble des* MAJORANTS *de* P :

$$\operatorname{maj} P = \{ x \in E \mid y \in P \Rightarrow y \leqq x \}.$$

P est dite *majorée* (dans $E, \leqq$) lorsque maj $P \neq \Phi$. Lorsque $P \cap \operatorname{maj} P \neq \Phi$, il est un *singleton* que l'on appelle *le maximum de P*.

Si $\{x\} = \operatorname{maj} \{x\}$, on dit que x est *un maximal* de $E, \leqq$

De façon analogue on pose pour l'ordre réciproque :

$\operatorname{mij} P = \{ x \in E \mid y \in P \Rightarrow x \leqq y \}$,

x minore $P \Leftrightarrow x \in \operatorname{mij} P$,

P est minorée $\Leftrightarrow \operatorname{mij} P \neq \Phi$,

$\#(P \cap \operatorname{mij} P) \leqq 1$,

$x = \min P \Leftrightarrow x \in P \cap \operatorname{mij} P$,

x est un minimal de $E \Leftrightarrow x \in E$ et $\{ x \} = \operatorname{mij} \{ x \}$,

x est un minimal de $P \Leftrightarrow \{ x \} = P \cap \operatorname{mij} \{ x \}$.

$E, \leqq$ est dit *bien ordonné* et l'ordre est dit *bon*, lorsque toute partie non vide de $E, \leqq$ comprend un minimum. D'où l'on déduit immédiatement que *tout bon ordre est total*. $\omega, \leqq$ est un exemple d'un ensemble bien ordonné.

On appelle *chaîne* de $E, \leqq$ toute partie P de E telle que :

$$x, y \in P \Rightarrow x \leqq y \text{ ou } y \leqq x.$$

Puisque $\mathfrak{P} E$ est ordonné par inclusion, l'ensemble Ch E des chaînes de $E, \leqq$ se trouve ainsi ordonné par l'inclusion. Le théorème de Hausdorff (1914) dit que ce dernier ordonné (Ch E, $\subset$) comprend un maximal : *tout ordonné contient une chaîne maximale.*

Dans la démonstration de ce théorème on utilise à plusieurs reprises l'axiome du choix. Mais on peut aussi prouver l'axiome du choix à partir du théorème de Hausdorff.

De ce théorème on déduit encore *le théorème de Zorn* affirmant qu'*un ordonné non vide dans lequel toute chaîne est majorée, comprend au moins un maximal.*

Une autre conséquence importante du théorème de Hausdorff est le théorème de Zermelo : *tout ensemble peut être bien ordonné* (c'est-à-dire : pour tout ensemble E, il existe un ordre $\leqq$ tel que $E, \leqq$ soit bien ordonné).

Comme belles applications du théorème de Zorn, on peut établir les théorèmes suivants :

Tout vectoriel possède une base (Steinitz).

Tout idéal propre d'un anneau unital est inclus à un idéal maximal.

Tout filtre est inclus à un ultrafiltre.

Si $E, \leqq$ et $F, \leqq$ sont deux *bons ordonnés*, on dit que la fonction $f : E \longrightarrow F$ est *croissante* lorsque $x \leqq y$ implique $fx \leqq fy$. On dit que $g : E \longrightarrow E$ est *expansive* lorsque l'on a $x \leqq fx$ pour tout $x \in E$. On peut montrer que toute transformation strictement croissante d'un ensemble bien ordonné est expansive.

On appelle *similitude* entre deux ordonnés toute bifonction qui soit une fonction strictement croissante dans les deux sens. Les principaux résultats concernant les bons ordonnés et leurs similitudes sont les suivants :

L'identité est la seule similitude d'un bon ordonné avec luimême.

Deux bons ordonnés ne peuvent être semblables que d'une seule manière (au plus).

Si deux bons ordonnés ne sont pas semblables, l'un d'eux est semblable (d'une seule manière) *à la section d'un élément* (parfaitement défini) *de l'autre* [1].

Il est impossible que deux bons ordonnés soient chacun semblable à la section d'un élément de l'autre.

Nous savons que l'*ensemble* ω des nombres naturels *est bien ordonné*. Tout naturel étant une partie de ω, est bien ordonné. Soit n un naturel non vide et soit $x \in n$. Dans l'ordonné n, on a : sect $x = \{0, 1, 2, \ldots, x-1\}$; d'autre part, on a par définition du naturel x, $x = \{0, 1, 2, \ldots, x-1\}$. Ainsi *les naturels sont de bons ordonnés finis dans lesquels tout élément est égal à sa section.* On exprime ce fait en disant que *les nombres naturels sont les ordinaux finis.*

Supprimant le mot « finis », on obtient la célèbre définition de von Neumann : *on appelle nombre* ORDINAL *tout bon ordonné dans lequel tout élément coïncide avec sa propre section.* Désignons par Ω *la classe des ordinaux.*

---

[1] Si $E, \leqq$ est un ordonné et $x \in E$, on appelle *section de x* et l'on désigne par sect x l'ensemble $\{y \in E \mid y < x\}$.

Il s'ensuit directement qu'un ensemble E étant donné, il existe au plus un ordre $\leqq$ sur E, tel que $E, \leqq$ soit un ordinal. Ainsi l'ordinal $E, \leqq$ est entièrement défini par l'ensemble E et nous pouvons parler de *l'ordinal E*.

On prouve que *tout élément d'un ordinal est un ordinal ; si α est un ordinal, on a : $\alpha \notin \alpha$* ; si α est un ordinal, il en est de même de $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ qui est *le successeur de α.*

Cette notion permet de *classifier les ordinaux* :

On appelle *successeur* tout ordinal α qui est le successeur d'un ordinal β ;

On appelle *ordinal limite* tout ordinal qui n'est pas successeur.

Si α et β sont des ordinaux on a une et une seule des trois éventualités :

$$\alpha \in \beta, \ \alpha = \beta, \ \beta \in \alpha .$$

Ainsi, définissant pour deux ordinaux α, β :

$$\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \in \beta \quad (\text{c'est-à-dire : } \alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta)$$

on munit la classe des ordinaux d'une correspondance d'ordre total. On prouve en plus que toute classe non vide d'ordinaux comprend un minimum ce qui montre que $\Omega, \leqq$ *est un bon ordonné.*

Nous avons alors deux théorèmes particulièrement importants ; en premier lieu le fameux théorème de Burali-Forti disant que *la classe des ordinaux n'a pas de maximum.* En second lieu un théorème de Cantor : *tout bon ordonné est semblable à un ordinal.*

Dans la classe des ordinaux, on peut distinguer certains éléments qu'on appelle *cardinaux.* On définit ceux-ci comme suit : soit α un ordinal et soit $\mathcal{A}$ la classe de tous les ordinaux équipotents à α ; cette classe est un ensemble et possède, comme toute classe non vide d'ordinaux, un minimum ; ce minimum est appelé *cardinal.* En vertu des théorèmes de Zermelo et de Cantor, *tout ensemble E est équipotent à un cardinal unique que l'on note $\# E$.*

Si a et b sont deux cardinaux, on a $a \leqq b$ si et seulement si a est équipotent à une partie de b (c'est-à-dire : $a \prec b$). Grâce au théorème de Bernstein-Schröder, nous pouvons écrire :

$$a \leqq b \text{ et } b \leqq a \Rightarrow a = b ,$$

ce qui exprime l'antisymétrie de la relation $\leqq$.

Nous avons déjà vu qu'*il n'y a pas de plus grand ordinal* (Burali-Forti). Cantor a prouvé qu'*il n'y a pas de plus grand cardinal.* En effet le théorème de Cantor dit que *pour tout cardinal a* : $a < \# \mathfrak{P} a$, d'où l'on déduit immédiatement : *la classe des cardinaux ne comprend pas de maximum.*

Une étude des *ensembles et leurs cardinaux* montre entre autres que *pour tout ensemble on peut trouver un ensemble disjoint de même cardinal* et que *la réunion de deux ensembles infinis équipotents est équipotente aux ensembles donnés.* On peut prouver qu'*on ne modifie pas le cardinal d'un ensemble infini en l'amputant d'une partie strictement moins nombreuse que lui.*

*
* *

Exposons pour terminer, encore deux contributions de John von Neumann

Nous allons d'abord construire *la classe de von Neumann.* Par *induction transfinie,* on définit la correspondance fonctionnelle $\Omega \longrightarrow \mathfrak{U} : \alpha \longrightarrow e_\alpha$ en posant

$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{\alpha+} = \mathcal{P}\, e_\alpha \\ e_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} e_\alpha , \text{ pour tout ordinal limite } \lambda . \end{cases}$$

La classe Π de von Neumann est la réunion de l'image de cette correspondance :

$$\Pi = \bigcup_{\alpha \in \Omega} e_\alpha .$$

Π jouit de certaines propriétés dont nous citons :

$\alpha \in \beta \Rightarrow e_\alpha \subset e_\beta$ (les e_α forment une chaîne)

$\alpha \neq \beta \Rightarrow e_\alpha \neq e_\beta$ (la correspondance $\{(e_\alpha , \alpha) | \alpha \in \Omega\}$ est bifonctionnelle).

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} \# e_\alpha = \Omega .$$

$$\Pi = \bigcup_{\alpha \in \Omega} (e_{\alpha+} \setminus e_\alpha) .$$

Il existe une correspondance bifonctionnelle $\Omega \longrightarrow \Pi$.

En admettant un nouvel axiome (l'axiome de fondement), on peut alors prouver que *la classe* Π *n'est autre que l'univers lui-même.*

Finalement nous donnons un critère de von Neumann permettant de distinguer ensembles et non-ensembles. En fait, sans ce critère il y aurait une lacune dans cet exposé, car jusqu'ici ensembles et non-ensembles se sont bousculés.

Pour prouver son critère, von Neumann a ajouté un axiome aux axiomes déjà rencontrés. Il arrive qu'un ensemble comprenne des ensembles qui comprennent eux-mêmes certains éléments de l'ensemble original. Par exemple $2 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$; dans ce cas il y a un seul élément qui soit disjoint de 2 : c'est 0. von Neumann impose que tout ensemble comprenne un élément disjoint de lui-même :

Axiome de fondement : Tout ensemble non vide comprend un ensemble disjoint de lui :

$$0 \neq e \in \mathfrak{U} \Rightarrow \exists x \in e : x \cap e = 0 .$$

De cet axiome on déduit immédiatement que des situations pathologiques comme l'autoappartenance sont impossibles :

Aucun ensemble ne s'autoappartient : en effet, soit $x \in \mathfrak{U}$; on a en vertu de l'axiome de fondement $\{x\} \cap x = 0$, ce qui équivaut à $x \notin x$.

De même, on démontre

$$a \in b \in \mathfrak{U} \Rightarrow b \notin a ,$$

et

$$a \in b \in c \in \mathfrak{U} \Rightarrow c \notin a ,$$

et *il n'existe pas de suite* :

$$a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni \ldots \ni a_i \ni a_{i+1} \ni \ldots$$

Le critère de von Neumann est alors le suivant : *Toute classe qui n'est pas un ensemble est « aussi nombreuse » que l'Univers ;* en symboles :

$$C \subset \mathfrak{U} \text{ et } C \notin \mathfrak{U} \Rightarrow \exists \textit{ correspondance bifonctionnelle } f : C \longrightarrow \mathfrak{U}.$$